Determinarea acceleraţiei gravitaţionale cu ajutorul unui pendul fizic

Scopul lucrării:

Studierea mişcării oscilatorii a unui corp solid (rigid), montat astfel încât să constituie un pendul fizic, precum şi determinarea cu ajutorul lui a acceleraţiei gravitaţionale.

I. Consideraţii teoretice

Pendulul fizic este un corp solid (rigid) montat în aşa fel încât să poată oscila liber într-un plan vertical, sub acţiunea forţei gravitaţionale, $\vec{G}$, în jurul unei axe care nu trece prin centrul său de masă, C (Fig. 1). Considerăm un corp de o formă oarecare, care este suspendat în punctul O şi poate oscila cu frecări neglijabile în jurul unei axe care trece prin punctul O. În poziţia de echilibru, centrul de masă C se află pe verticala ce trece prin punctul de susţinere O. În această poziţie, asupra corpului acţionează greutatea $\vec{G}$ (aplicată în punctul C) şi reacţiunea $\vec{R}$ (aplicată în punctul O), cele două forţe fiind egale, pe aceeaşi direcţie şi în sens opus (Fig. 1).

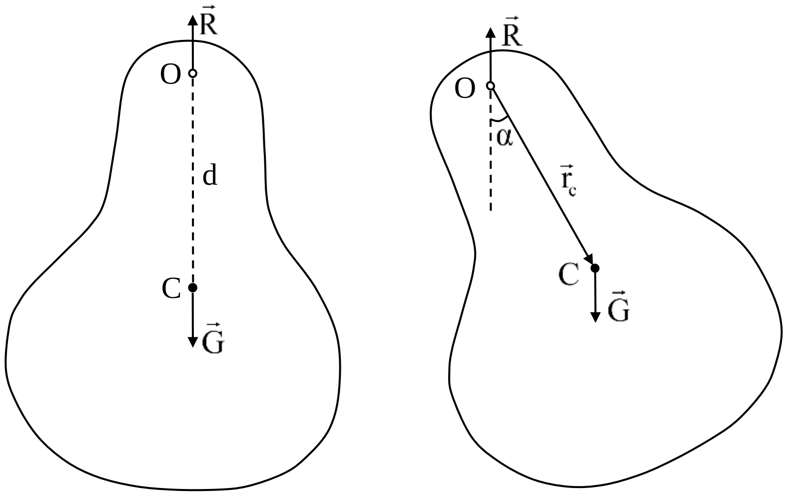

Fig. 1.

Dacă se scoate pendulul din poziţia de echilibru, acesta efectuează o mişcare oscilatorie în jurul acestei poziţii. Prin scoaterea pendulului din poziţia de echilibru cu un unghi α, $\vec{G}$ şi $\vec{R}$ formează un cuplu de forţe, cu moment diferit de zero, ce tinde să readucă corpul în poziţia de echilibru. Acest moment de revenire este:

$$\vec{M} = \vec{r}_c \times \vec{G} \tag{1}$$

sau scalar:

$$M = -mg \cdot d \cdot \sin\alpha \tag{2}$$

unde m este masa corpului, $\vec{r}_c$ este vectorul de poziţie al centrului de masă faţă de punctul O, iar $|\vec{r}_c| = d$. În cazul deplasărilor mici, $\sin\alpha \cong \alpha$ şi pendulul se află în aşa numitul regim de amplitudini mici, atunci:

$$M \cong -mg \cdot d \cdot \alpha \tag{3}$$

iar pendulul oscilează armonic, de o parte şi de alta a poziţiei de echilibru.

Ecuaţia de mişcare a pendulului fizic se deduce folosind legea fundamentală a dinamicii mişcării de rotaţie:

$$I \cdot \vec{\varepsilon} = \vec{M} \tag{4}$$

unde $I = mr_c^2$ este momentul de inerţie în raport cu axa de rotaţie, iar $\varepsilon = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$ este acceleraţia unghiulară. Din relaţiile (3) şi (4) rezultă:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgd}{I} \cdot \alpha = 0 \tag{5}$$

sau:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot \alpha = 0 \tag{6}$$

unde am notat $\omega_0^2 = \frac{mgd}{I}$. Relaţia (6) este ecuaţia diferenţială a unui oscilator armonic, iar soluţia acestei ecuaţii este legea de mişcare:

$$\alpha = A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi) \tag{7}$$

unde A şi φ reprezintă amplitudinea, respectiv, faza iniţială a mişcării, ele putând fi determinate din condiţiile iniţiale ale mişcării.

Perioada mişcării oscilatorii descrisă de ecuaţia (7), adică perioada de oscilaţie a pendulului fizic este:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \tag{8}$$

II. Metodica experimentală

II.1. Dispozitivul experimental

Pendulul fizic utilizat în această lucrare este format dintr-o platbandă metalică, lungă de aproximativ 1 m, care este prevăzută în lungul ei cu opt orificii echidistante, dispuse simetric de o parte şi de alta, a centrului de masă (Fig. 2). Platbanda poate fi aşezată, cu fiecare orificiu al ei, pe un suport fixat în perete, prevăzut cu un cuţit, din oţel de înaltă duritate, cu muchia în sus, muchie ce constituie axa de rotaţie. Aşezând platbanda pe muchia cuţitului, folosind unul dintre orificii, se obţine un pendul fizic de o anumită lungime d şi un anumit moment de inerţie I. Schimbând orificiul, se modifică atât d cât şi I**,** astfel că pendulul va avea o altă perioadă de oscilaţie.

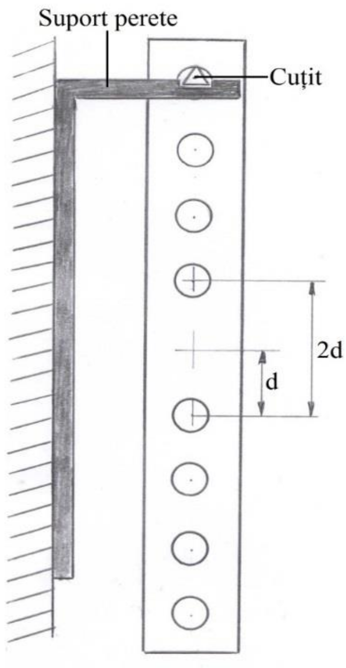

Fig. 2

Notăm cu I_0 momentul de inerţie al platbandei faţă de axa ce trece prin centrul său de masă şi care este paralelă cu axul de rotaţie ce trece prin punctul de susţinere. Conform teoremei lui Steiner, momentul de inerție I al platbandei față de axa ce trece prin punctul de susținere este egal cu momentul de inerție I_0 plus produsul dintre masa platbandei, m, și pătratul distanței dintre cele două axe, d^2:

$$I = I_0 + md^2 \tag{9}$$

Introducând relaţia (9) în relaţia (8) obţinem perioada de oscilaţie a pendulului fizic:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{d}{g} + \frac{I_0}{mgd}} \tag{10}$$

II.2. Modul de lucru

Pentru determinarea valorii acceleraţiei gravitaţionale se procedează astfel:

i. Cu ajutorul ruletei se măsoară distanţele (2d) dintre centrele orificiilor simetric dispuse faţă de centrul de masă al barei (Fig. 2), iar valorile lui d se trec în tabelul 1;

ii. Se sprijină bara cu mare grijă pe cuţitul de susţinere, începând cu primul orificiu dintr-un capăt al ei, şi se scoate din poziţia de echilibru cu un unghi de aproximativ 2^o - 3^o. Se cronometrează durata (t_1) a 30 de oscilaţii complete (n_1), iar cu ajutorul relaţiei $T_1 = t_1/n_1$ se calculează perioada de oscilaţie a pendulului;

iii. Se schimbă poziţia punctului de suspensie în al doilea orificiu şi se măsoară, în aceleaşi condiţii, perioada T_2;

iv. Operaţiunile se repetă pentru toate orificiile aflate deasupra centrului de masă, după care se întoarce platbanda cu 180^o şi se fac aceleaşi determinări pentru următoarele orificii;

v. Rezultatele obţinute se trec în tabelul 1.

Tabelul 1

<table>
<tr><th>d
(cm)</th><th>d^2
(cm^2)</th><th>t
(s)</th><th>T
(s)</th><th>$\overline{T}$
(s)</th><th>$d\overline{T}^2$
($cm \cdot s^2$)</th><th>g
(m/s^2)</th></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td></td><td></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="8"></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td></td><td></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td></td><td></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td></td><td></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

II.3. Prelucrarea datelor experimentale

Relaţia (10), care dă perioada de oscilaţie a pendulului pentru orice distanţă d la care se află axul de oscilaţie faţă de centrul de masă al barei, se poate scrie astfel:

$$d\overline{T}^2 = \frac{4\pi^2}{g}d^2 + \frac{4\pi^2 I_0}{mg} \tag{11}$$

unde $\overline{T}$ reprezintă media celor două perioade determinate pentru cele două orificii, aflate la aceeaşi distanţă, faţă de centrul de masă.

Dacă reprezentăm grafic $d\overline{T}^2$ în funcţie de d^2, obţinem o dreaptă, iar din panta dreptei, pe care o notăm cu tgθ, putem determina acceleraţia gravitaţională. Deoarece:

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{4\pi^2}{g} \tag{12}$$

se determină uşor valoarea acceleraţiei gravitaţionale, g.